УДК 517.524

Любимому папе посвящаю

О цепной дроби чисел e, e^2

С.Н. Гладковский

Школьникам. Доказать предложенные автором новые формулы разложения в цепную дробь чисел e, e^2.

Ключевые слова: непрерывная дробь, цепная дробь, e^2, $\exp(2x)$.

В [1, гл.2, п.4, с.122] приведена формула разложения в цепную дробь функции $\frac{th(x)}{x}$, которую запишем так:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{th(x)}{x} = 1 - \frac{5x^2}{U_0 - 5x^2} \\ &U_k = (4k+1)(4k+3)(4k+5) + 4x^2(4k+3) - \frac{x^2(4k+1)}{1 - \frac{x^2(4k+9)}{U_{k+1}}} \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Вспоминая, что $\frac{th(x)}{x} = \frac{1}{x}\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$, получаем:

$$\left.\begin{aligned} &e^{2x} = \frac{1}{1-x}\left(1 + x - \frac{10x^3}{(1-x)U_0 - 5x^2 + 10x^3}\right) \\ &U_k = (4k+1)(4k+3)(4k+5) + 4x^2(4k+3) - \frac{x^2(4k+1)}{1 - \frac{x^2(4k+9)}{U_{k+1}}} \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Видим, формула (2) справедлива при $x \neq 1$. Возникает вопрос о величине $U_0(x = 1)$.

Оказалось, имеет место быть:

$$\left.\begin{aligned} &U_0 = \frac{5(e^2+3)}{2} = 25,972\,640\ldots \\ &e^2 = \frac{2U_0}{5} - 3 \\ &U_k = (4k+3)^3 - \frac{4k+1}{1 - \frac{4k+9}{U_{k+1}}} \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

А для числа e справедлива следующая цепная дробь:

$$\left.\begin{aligned} &e = 3 - \frac{5}{E_0}; \alpha = 13,893 \\ &E_k = 2(4k+3)(8k^2+12k+3) - \frac{4k+1}{4 - \frac{4k+9}{E_{k+1}}} \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Доказать.

Надо отметить, что абсолютный показатель скорости сходимости $\alpha_{1000} = 13,893$ данной (4) цепной дроби – очень хороший, так как 1000 циклов даёт не меньше 13890 верных вычисленных знаков.

Литература

1. Хованский А.Н. Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближённого

анализа. М.: Гостехиздат, 1956., 204с.

S.N. Gladkovskii

New continued fraction for e, e^2.

The author proposed a new formula of expansions the continued fraction for e, e^2.

Keywords: continued fraction, chain fraction, e, e^2, A261024.

Гладковский Сергей Николаевич

E-mail: journaly2010@bk.ru